(C) состоит из уравнений (2.4) и уравнений

$$\omega_i^3 = m_{ik}\omega^k, \quad \omega_3^0 = n_k\omega^k, \quad dp = p_k\omega^k. \tag{3.3}$$

Замыкая (3.3), находим:

$$\Delta m_{ik} \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta n_k \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta p_k \wedge \omega^k = 0, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta m_{ii} = dm_{ii} - 2m_{ii}\omega_i^i - m_i\omega^j, \quad \Delta m_{ij} = dm_{ij}, \\ &\Delta n_i = dn_i + n_i((n_i m_{jj} + m_{ji}(1-n_j))\omega_j^j - n_i\omega_i^i, \\ &\Delta p_i = dp_i + p_i(n_i\omega_3^i - \omega_i^i) + p_j n_j \omega_3^j, \\ &m_i = n_i(m_{ii}m_{jj} - m_{ij}m_{ji}) + n_j m_{ii}(m_{ij} + m_{ji}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из (2.4), (3.3), (3.4) следует, что конгруэнции (C) эквидистант определяются с произволом четырех функций двух аргументов. Учитывая (3.3) в (3.2), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} f = 0, \ x^0 = 0, \ (x^2 + x^3 n_1)\omega^1 + (x^1 + x^3 n_2)\omega^2 = 0, \\ x^3\left((m_{k1}x^k - \frac{p_1}{2p}x^3)\omega^1 + (m_{k2}x^k - \frac{p_2 x^3}{2p})\omega^2\right) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

для определения фокальных точек эквидистанты C и фокальных семейств конгруэнции (C). Из (3.6) следует

Т е о р е м а 2. Конгруэнция (C) эквидистант имеет в общем случае четыре собственные фокальные поверхности. Несобственным фокальным точкам A_1 и A_2 эквидистанты $C \in (C)$ соответствуют координатные фокальные линии $\omega^2 = 0$ и $\omega^1 = 0$.

4. Условие $m_{ii} = 0$ означает, что точка A_i является сдвоенной несобственной фокальной точкой эквидистанты $C \in (C)$. Рассмотрим конгруэнцию эквидистант с двумя сдвоенными несобственными фокальными точками. Тогда

$$m_{11} = 0, \quad m_{22} = 0. \tag{4.1}$$

Учитывая в (2.4), (3.3), (3.4) эти соотношения, убеждаемся, что такие конгруэнции определяются с произволом двух функций двух аргументов. Две собственные фокальные точки эквидистанты C этой конгруэнции определяются уравнениями:

$$f = 0, x^0 = 0, (2pn_1 m_{12} + p_1)x^1 - (2pn_2 m_{21} + p_2)x^2 + (p_1 p_2 - p_2 n_1)x^3 = 0. \tag{4.2}$$

Из (2.4) следует, что если касательная плоскость к поверхности (A_0), ассоциированной с конгруэнцией (C), содержит прямую A_1A_2, то и касательная плоскость к поверхности (A_3) также содержит эту прямую, и наоборот. Конгруэнции эквидистант, обладающие этим свойством, характеризуются условиями:

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0 \tag{4.3}$$

и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Библиографический список

1. Е ф и м о в Н.В. Высшая геометрия / ГИТТЛ. М., 1953.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1969. Т.2. С.179-206.

УДК 514.75

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ, ПОРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВОМ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Н.В.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Продолжается начатое в [1] - [3] исследование n-параметрических семейств Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to p_n$ n-мерных проективных пространств. Доказано, что семейство Π_n порождает в $\mathcal{P}_n$ ряд аффинных связностей. Для каждой из них получена геометрическая характеристика параллельного переноса в этой связности и геодезических линий. Изучены порожденные связностями ассоциированные геометрические образы: квазихарактеристические направления, индикатрисы, главные точки. Рассмотрены некоторые специальные классы семейств Π_n. В работе использованы обозначения и формулы из [1] и [2].

§I. Объекты связностей и тензоры кривизны, порожденные семейством Π_n

Рассмотрим n-параметрическое семейство Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to p_n$ n-мерных проективных пространств, отображающих заданную точку $A_0 \in \mathcal{P}_n$ в заданную точку $a_0 \in p_n$, причем точки A_0 и a_0 описывают n-мерные области. В реперах $\{A_{J'}\}, \{a_{i'}\}$ $(J', i' = \overline{0,n})$ семейство Π_n определяется продолженной системой уравнений Пфаффа (I.6), (I.8) работы [1]. Нормали $\vartheta(\sigma) \in p_n$, $N(\sigma) = \pi^{-1}(\vartheta(\sigma)) \in \mathcal{P}_n$ задаются в однородных координатах $\tilde{x}^i$, $\tilde{X}^J$ уравнениями

$$\overset{\sigma}{\vartheta}_i \tilde{x}^i + \tilde{x}^0 = 0, \quad \overset{\sigma}{N}_J \tilde{X}^J = 0, \tag{1.1}$$

где (см. [2], с.51):

$$\overset{\sigma}{\vartheta}_i = \vartheta_i + \sigma(N_i - \vartheta_i), \quad \overset{\sigma}{N}_J = \overset{\sigma}{\vartheta}_i M_J^i - P_J. \tag{1.2}$$

Отнесем пространство p_n к реперу r_σ [2, с.52], поместив вершины a_i на нормаль $\vartheta(\sigma)$, а пространство $\mathcal{P}_n$ - к реперу R_σ, в котором $A_i \in \mathcal{N}(\sigma)$. Тогда из (1.1), (1.2) и (1.10), (1.11) работы [2] следует:

$$\nu_i = 0, \ \overset{\sigma}{N}_J = 0, \ P_J = 0, \ \omega^0_i = \overset{\sigma}{\nu}_{iK}\Omega^K, \ \Omega^0_J = \overset{\sigma}{N}_{JK}\Omega^K, \tag{1.3}$$

где

$$\overset{\sigma}{\nu}_{iK} = -\nu_{iK} + 6(\overset{1}{\nu}_{iK} - N_{iK}), \ \overset{\sigma}{N}_{JK} = M^i_J \overset{\sigma}{\nu}_{iK} + P_{JK} - \overset{\sigma}{\nu}_i M^i_{JK}. \tag{1.4}$$

Структурные уравнения форм $\widetilde{\Omega}^K_J = \Omega^K_J - \delta^K_J \Omega^0_0$ связности $\overset{\sigma}{N}$ порожденной в пространстве $\mathcal{P}_n$ полем нормалей $N(\sigma)$, имеют вид:

$$d\widetilde{\Omega}^K_J = \widetilde{\Omega}^L_J \wedge \widetilde{\Omega}^K_L + \frac{1}{2}\, {}^{\overset{\sigma}{N}}R^K_{LHJ}\, \Omega^L \wedge \Omega^H, \tag{1.5}$$

где

$${}^{\overset{\sigma}{N}}R^K_{LHJ} = 2(\overset{\sigma}{N}_{J[L}\delta^K_{H]} - \overset{\sigma}{N}_{[LH]}\delta^K_J). \tag{1.6}$$

Вместе с уравнениями $d\Omega^J = \Omega^K \wedge \widetilde{\Omega}^J_K$ уравнения (I.5) являются уравнениями пространства аффинной связности $(\mathcal{P}_n, \overset{\sigma}{N})$ без кручения. Аналогично определяется в пространстве P_n связность $\overset{\sigma}{\nu}$ порожденная полем нормалей $\nu(\sigma)$.

Рассмотрим системы величин Γ^L_{JK}, G^L_{JK} [2, с.5I] и

$$
\begin{gathered}
{}^{\circ}G^L_{JK} = \frac{1}{2}G^L_{(JK)}, \ \gamma^L_{JK} = G^L_{JK} - \Gamma^L_{JK}, \ {}^{\circ}\gamma^L_{JK} = {}^{\circ}G^L_{JK} - \Gamma^L_{JK}, \\
g^L_{JK} = G^L_{JK} - B^L_H \Gamma^H_{PQ} A^P_J A^Q_K, \ {}^{\circ}g^L_{JK} = {}^{\circ}G^L_{JK} - B^L_H \Gamma^H_{PQ} A^P_J A^Q_K,
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

где A^K_J и B^K_J определены формулами (2.I2) в [1].

П р е д л о ж е н и е 1.1. Каждая из систем величин $\{{}^{\circ}g^L_{JK}\}$, $\{\Gamma^L_{JK}\}, \{G^L_{JK}\}, \{{}^{\circ}G^L_{JK}\}, \{\gamma^L_{JK}\}, \{{}^{\circ}\gamma^L_{JK}\}, \{g^L_{JK}\}$ определяет в нормализованном пространстве $\mathcal{P}_n$ аффинную связность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим, например, систему величин $\{G^L_{JK}\}$. Обозначим

$${}^{G}\Omega^J_K = \Omega^J_K - \delta^J_K \Omega^0_0 + G^J_{KH}\Omega^H. \tag{1.8}$$

Используя соотношения

$$\nabla G^L_{JK} = -\delta^L_{(J}\Omega^0_{K)} + \delta^L_{(J}\lambda^i_{K)}\omega^0_i + G^L_{JKH}\Omega^H, \tag{1.9}$$

находим

$$
\begin{gathered}
d\,{}^{G}\Omega^J_K = {}^{G}\Omega^L_K \wedge {}^{G}\Omega^J_L + \frac{1}{2}\,{}^{G}R^J_{LHK}\,\Omega^L \wedge \Omega^H, \\
d\Omega^J = \Omega^K \wedge {}^{G}\Omega^J_K + \frac{1}{2}\,{}^{G}S^J_{LH}\,\Omega^L \wedge \Omega^H,
\end{gathered} \tag{1.10}
$$

где

$${}^{G}R^J_{LHK} = 2(G^J_{T[L}G^T_{|K|H]} - \delta^J_K \overset{\sigma}{N}_{[LH]} - \delta^J_{[L} N_{|K|H]} - G^J_{K[LH]}), \ {}^{G}S^J_{LH} = G^J_{HL} - G^J_{LH}. \tag{1.11}$$

Таким образом, формы Ω^J, ${}^{G}\Omega^J_K$ удовлетворяют уравнениям структуры пространства аффинной связности. Назовем эту связность связностью $\overset{\sigma}{G}$. Заменяя в (1.8) G^J_{KH} на величины Γ^J_{KH} и (1.7), получим структурные уравнения аффинных связностей $\overset{\sigma}{\Gamma}$, ${}^{\circ}\overset{\sigma}{G}$, $\overset{\sigma}{\gamma}$, ${}^{\circ}\overset{\sigma}{\gamma}$, $\overset{\sigma}{g}$, ${}^{\circ}\overset{\sigma}{g}$ и выражения для их тензоров кривизны и кручения, причем оказывается, что

$${}^{\gamma}S^J_{LH} = {}^{g}S^J_{LH} = {}^{G}S^J_{LH}, \quad {}^{\Gamma}S^J_{LH} = {}^{\circ\gamma}S^J_{LH} = {}^{\circ G}S^J_{LH} = {}^{\circ g}S^J_{LH} = 0, \tag{1.12}$$

т.е. пространства $(\mathcal{P}_n, \overset{\sigma}{\Gamma})$, $(\mathcal{P}_n, {}^{\circ}\overset{\sigma}{\gamma})$, $(\mathcal{P}_n, {}^{\circ}\overset{\sigma}{G})$, $(\mathcal{P}_n, {}^{\circ}\overset{\sigma}{g})$ являются пространствами аффинной связности без кручения. Заметим, что связности $\overset{1}{N}$, $\overset{1}{G}$, ${}^{\circ}\overset{1}{G}$ определяются фундаментальным объектом Γ_1 первого порядка семейства Π_n, а остальные – фундаментальным объектом Γ_2 второго порядка.

§2. Параллельный перенос

Для каждой точки $A_0 \in \mathcal{P}_n$ семейство Π_n порождает морфизм $\mu_{A_0}: T(\mathcal{P}_n) \to T(P_n)$ касательных к $\mathcal{P}_n$ и P_n расслоений, определяемый следующим образом:

$$\mu_{A_0}: (M, \bar{V}) \in T(\mathcal{P}_n) \mapsto (\pi_{A_0}(M), T_M(\pi_M)(\bar{V})) \in T(P_n), \tag{2.1}$$

где $M \in \mathcal{P}_n$, $\bar{V} \in T_M(\mathcal{P}_n)$, π_{A_0}, π_M — коллинеации семейства Π_n, соответствующие точкам A_0 и M, $T_M(\pi_M)$ – касательное в точке M отображение к отображению π_M.

Назовем отображения

$$x^i = \lambda^i_J X^J, \quad x^i = a^i_K x^K \tag{2.2}$$

отображениями λ и a ($a^i_K = \lambda^i_J \overset{*}{M}{}^J_K$ [1, с.54]).

П р е д л о ж е н и е 2.1. Вектор $\bar{u} \in T_{A_0}$ переносится параллельно в связности $\overset{\sigma}{G}(\overset{\sigma}{\Gamma}, \overset{\sigma}{\gamma}, \overset{\sigma}{g})$ в точку $M = A_0 + dA_0$ в том и только в том случае, если соответствующий ему при отображении $\mu_{A_0}(\lambda, \lambda^{-1} \circ a \circ \mu_{A_0}, \lambda^{-1} \circ \mu_{A_0})$ вектор переносится параллельно в связности $\overset{\sigma}{\nu}(\overset{\sigma}{\nu}, \overset{\sigma}{N}, \overset{\sigma}{N})$.

Докажем это утверждение для связности $\overset{\sigma}{G}$ (для остальных случаев рассуждения аналогичны). Пусть $M = A_0 + dA_0$, $\bar{u} = \{\xi^J\}$. Тогда M и $\pi_{A_0}(M)$ имеют координаты $\{\Omega^J\}$ и $\{M^i_J \Omega^J + \langle 2 \rangle\}$, где символ $\langle n \rangle$ означает совокупность членов порядков малости $p \geqslant n$ относительно Ω^J. Отображение $T_M(\pi_M)$ определяется матрицей с компонентами $\{M^i_J + M^i_{JK}\Omega^K\}$. Пусть $\bar{V} = \{\eta^J\}$ – результат параллельного перенесения в связности $\overset{\sigma}{G}$ вектора $\bar{u}$ в точку M, т.е. $\eta^J = \xi^J - G^J_{KL}\xi^K\Omega^L$. Для $T_M(\pi_M(\bar{V}))$ имеем:

$$(M^i_J + M^i_{JL}\Omega^L)(\xi^J - G^J_{KL}\xi^K\Omega^L) = M^i_J\xi^J + \langle 2 \rangle \tag{2.3}$$

Из (2.2) следует, что вектор $x^i = M^i_J \xi^J$, соответствующий при отображении μ_{A_0} вектору $\bar{u}$, переносится параллельно в связности $\overset{\sigma}{\nu}$.

Объект $\{\Gamma^L_{JK}\}$, порожденный индуцированным точечным отображением φ, был введен Г.Врэнчану [7], [4]. Поэтому связность $\overset{\sigma}{\Gamma}$ будем называть связностью Врэнчану. Связность $\overset{\sigma}{G}$ является обобщением связности Врэнчану.

Связности ${}^{\circ}\overset{\sigma}{G}, {}^{\circ}\overset{\sigma}{\gamma}, {}^{\circ}\overset{\sigma}{g}$ характеризуются как единственные свя ности без кручения, имеющие общие геодезические соответствен со связностями G, γ, g.

Для данной нормализации $\nu(\sigma), N(\sigma)$ определяется множество $\overline{\Psi}_{A_0}$ отображений, графики которых имеют в точке $(A_0, a_0) \in \mathcal{P}_n \times p_n$ касание второго порядка с отображением

$$x^i = M^i_j X^j + \frac{1}{4} M^i_{(jk)} X^j X^k, \qquad (2.4)$$

т.е. струя второго порядка точечных отображений с началом A_0 концом a_0.

П р е д л о ж е н и е 2.2. Вектор $\overline{u} \in T_{A_0}$ переносится п раллельно в связности ${}^{\circ}\overset{\sigma}{G}({}^{\circ}\overset{\sigma}{\gamma}, {}^{\circ}\overset{\sigma}{g})$ в точку $M = A_0 + dA_0$ в том и тольк в том случае, если он переносится параллельно в связности Врэнчану для отображения $\psi \in \overline{\Psi}_{A_0}$ $(\varphi^{-1} \cdot a \cdot \psi, \varphi^{-1} \circ \psi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построив объект связности Врэнчану для точечного отображения ψ струи $\overline{\Psi}_{A_0}$, мы придем $\{{}^{\circ}G^{l}_{jk}\}$, что дает геометрическую интерпретацию параллельного переноса в связности ${}^{\circ}\overset{\sigma}{G}$, а тем самым в связностях ${}^{\circ}\overset{\sigma}{\gamma}$ и ${}^{\circ}\overset{\sigma}{g}$.

§3. Геодезические линии

Кривая $\ell: R \to \mathcal{P}_n$

$$X^j = \xi^j t - \frac{1}{2} \Gamma^j_{kl} \xi^k \xi^l t^2 + \langle 3 \rangle \qquad (3.1)$$

является геодезической в пространстве аффинной связности $\{\mathcal{P}_n,$ Аналогичный вид имеют геодезические остальных связностей, вв денных в §1.

П р е д л о ж е н и е 3.1. Геодезические линии связнос $\overset{\sigma}{\Gamma}$ (связностей $\overset{\sigma}{G}$, ${}^{\circ}\overset{\sigma}{G}$) являются прообразами прямых пространства p_n при отображении φ (при отображении струи $\overline{\Psi}_{A_0}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\varphi \circ \ell$ в реперах τ_σ, R_σ имеем:

$$x^i = \lambda^i_j (\xi^j t - \frac{1}{2} \Gamma^j_{kl} \xi^k \xi^l t^2) + \frac{1}{2} \lambda^i_{jk} \xi^j \xi^k t^2 + \langle 3 \rangle = \lambda^i_j \xi^j t + \langle 3 \rangle, \qquad (3.2)$$

т.е. линия $\varphi \circ \ell$ имеет касание второго порядка с прямой $x^i_\sigma = \lambda^i_j \xi$ причем это выполняется для всех $A_0 \in \mathcal{P}_n$. Для связностей $\overset{\sigma}{G}$ и доказательство аналогично.

П р е д л о ж е н и е 3.2. Геодезические связностей ${}^{\circ}\overset{\sigma}{\gamma}$ $\overset{\sigma}{\gamma}$ $({}^{\circ}\overset{\sigma}{g}$ и $\overset{\sigma}{g})$ являются прообразами прямых пространства $\mathcal{P}_n$ при отображении $\varphi^{-1} \cdot a \cdot \psi (\varphi^{-1} \circ \psi)$, где $\psi \in \overline{\Psi}_{A_0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение φ^{-1} определяется формулами:

$$X^j = \overset{*}{\lambda}{}^j_i x^i - \frac{1}{2} \overset{*}{\lambda}{}^k_i \overset{*}{\lambda}{}^l_j \Gamma^j_{kl} x^i x^j + \langle 3 \rangle. \qquad (3.3)$$

Используя (2.4), (2.5), (3.3) для $\varphi^{-1} \cdot a \cdot \psi$ и $\varphi^{-1} \circ \psi$, получим:

$$y^j = \delta^j_k X^k + \frac{1}{2} \gamma^j_{kl} X^k X^l + \langle 3 \rangle, \quad \hat{y}^j = A^j_k y^k + \langle 3 \rangle. \qquad (3.4)$$

Далее предложение доказывается аналогично предложению 3.1.

§4. Характеристические и квазихарактеристические направления

Используя формулу (1.13) в [4], убеждаемся, что характеристическое направление $\{\xi^j\}$ точечного отображения φ определяется условиями:

$$\Gamma^j_{kl} \xi^k \xi^l - 2 k \xi^j = 0. \qquad (4.1)$$

Назовем его Γ -характеристическим направлением. Заменяя в (4.1) Γ^j_{kl} на G^j_{kl} и величинами из (1.7), получим соответственно G -характеристическое, γ -характеристическое, g -характеристическое направление.

По аналогии с [5] дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е 4.1. Направление, определяемое в точке P геодезической ℓ в пространстве аффинной связности A, называется квазихарактеристическим направлением отображения $f: A \ni P \mapsto p \in B$ пространств аффинной связности A и B, если образ кривой ℓ при отображении f имеет в точке $p = f(P)$ геометрическое касание второго порядка с геодезической линией пространства B.

Из предложений (3.1), (3.2) непосредственно вытекает

П р е д л о ж е н и е 4.1. G-, γ-, g - характеристические направления в точке A_0 являются соответственно квазихарактеристическими направлениями отображений $\psi: (\mathcal{P}_n, \overset{\sigma}{G}) \to (p_n, \overset{\sigma}{\gamma})$, $\varphi^{-1} \cdot a \cdot \psi: (\mathcal{P}_n, \overset{\sigma}{\gamma}) \to (\mathcal{P}_n, \overset{\sigma}{N})$, $\varphi^{-1} \circ \psi: (\mathcal{P}_n, \overset{\sigma}{g}) \to (\mathcal{P}_n, \overset{\sigma}{N})$, где $\psi \in \overline{\Psi}_{A_0}$.

§5. Индикатрисы, главные точки

Фундаментальный объект Γ_2 семейства T_n определяет для каждой точки $A_0 \in \mathcal{P}_n$ и нормали $\nu(\sigma)$ четыре инвариантных многообразия:

$$\begin{cases} \Gamma^l_{jk} X^j X^k - 2 X^l = 0, & G^l_{jk} X^j X^k - 2 X^l = 0, \\ \gamma^l_{jk} X^j X^k - 2 X^l = 0, & g^l_{jk} X^j X^k - 2 X^l = 0. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Назовем эти многообразия соответственно $\overset{\sigma}{\Gamma}$-, $\overset{\sigma}{G}$-, $\overset{\sigma}{\gamma}$-, $\overset{\sigma}{g}$ - индикатрисой, а точку этого многообразия, отличную от A_0, соответственно $\overset{\sigma}{\Gamma}$-, $\overset{\sigma}{G}$-, $\overset{\sigma}{\gamma}$-, $\overset{\sigma}{g}$ - главной точкой. Из формул (2.4), (3.3), (3.4), (4.1) вытекают следующие два предложения:

П р е д л о ж е н и е 5.1. $\overset{\sigma}{G}$ -главная ($\overset{\sigma}{\gamma}$-, $\overset{\sigma}{g}$ -главная) точка M характеризуется тем, что прямая $[A_0 M]$ является $\mathcal{K}(Q_J)$ - главной прямой отображения $\psi \in \overline{\Psi}_{A_0}(\varphi^{-1} \circ a \circ \psi, \varphi^{-1} \circ \psi)$ и для всех гомографий, касательных к $\psi(\varphi^{-1} \circ a \circ \psi, \varphi^{-1} \circ \psi)$ в точке A_0, для которых $[A_0 M]$ есть $\mathcal{K}(Q_J)$ - главная прямая, выполняется $\mathcal{K}(Q_J)(M) \in \pi^{-1}(\nu(\sigma))$.

П р е д л о ж е н и е 5.2. Прямая λ-связки $\{A_0\}$ является G-характеристической (γ-, g -характеристической) в том и только в том случае, если на ней лежит $\overset{\sigma}{G}$ -главная ($\overset{\sigma}{\gamma}$-, $\overset{\sigma}{g}$ -главная) точка.

§6. Некоторые специальные случаи

О п р е д е л е н и е 6.1. Говорят, что семейство Π_n относится к типу $\Pi_n^{\Gamma}, \Pi_n^{G_0}, \Pi_n^{\gamma_0}, \Pi_n^{g_0}, \Pi_n^{\gamma}$, если компоненты соответствующих объектов связностей определяются формулами:

$$\begin{cases} \overset{\sigma}{\Gamma}{}^I_{JK} = \frac{1}{2}\delta^I_{(J} L_{K)}, \quad {}^0\overset{\sigma}{G}{}^I_{JK} = \frac{1}{2}\delta^I_{(J} K_{K)}, \quad {}^0\overset{\sigma}{\gamma}{}^I_{JK} = \frac{1}{2}\delta^I_{(J} R_{K)}, \\ {}^0\overset{\sigma}{g}{}^I_{JK} = \frac{1}{2}\delta^I_{(J} T_{K)}, \quad \overset{\sigma}{\gamma}{}^I_{JK} = \delta^I_J S_K. \end{cases} \tag{6.1}$$

Очевидно, $\Pi_n^{\gamma} \subset \Pi_n^{\gamma_0}$ и введенное в [1] семейство Π_n^0 относится к типу Π_n^{γ}.

Справедливы следующие предложения.

П р е д л о ж е н и е 6.1. Если семейство Π_n относится к классу $\Pi_n^{\Gamma}(\Pi_n^{G_0}, \Pi_n^{\gamma_0}, \Pi_n^{g_0})$, то 1) множество $\overset{\sigma}{\Gamma}$ -главных ($\overset{\sigma}{G}$-, $\overset{\sigma}{\gamma}$-, $\overset{\sigma}{g}$ -главных) точек, построенное для точки A_0, является гиперплоскостью; 2) любая прямая связки $\{A_0\}$ является Γ-характеристической (G-, γ-, g -характеристической).

П р е д л о ж е н и е 6.2. Семейство Π_n относится к классу $\Pi_n^{\gamma_0}$ в том и только в том случае, если связности $\overset{\sigma}{G}$ и $\overset{\sigma}{\Gamma}$ имеют общие геодезические.

П р е д л о ж е н и е 6.3. Семейство Π_n относится к классу Π_n^{γ} в том и только в том случае, если связности $\overset{\sigma}{G}$ и $\overset{\sigma}{\Gamma}$ имеют общую псевдосвязность [8, с.149].

В этом случае связность $\overset{\sigma}{\gamma}$ порождается полем аффинора $\{A^J_K\}$. Действительно, из $A^K_J = \overset{*}{\lambda}{}^K_I M^I_J$ получаем:

$$\nabla A^K_J = (A^K_H G^H_{JL} - A^T_J \Gamma^K_{TL})\Omega^L. \tag{6.2}$$

Откуда вытекает:

$$\nabla A^J_J = A^J_K \gamma^K_{JL} \Omega^L. \tag{6.3}$$

Если $\overset{\sigma}{G}$ и $\overset{\sigma}{\Gamma}$ имеют общую псевдосвязность, то из (6.1) получаем

$$\nabla \ln A^J_J = S_L \Omega^L. \tag{6.4}$$

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й Н.В. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып.20. С.50-57.

2. М а л а х о в с к и й Н.В. Нормализация проективных пространств и характеристические числа, порожденные семейством коллинеаций // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.21. С.50-56.

3. М а л а х о в с к и й Н.В. Двупараметрические семейства коллинеаций проективных плоскостей // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.66-72.

4. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия, 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С.65-107.

5. Б о л о д у р и н В.С. О геометрии точечных отображений P_m в P_n ($m<n$) // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.207-222.

6. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$ ($m>n$) // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.5-9.

7. Vranceanu G. Sul tensore associatoad corrispondenza fra spaz. proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. V.12. N4. P. 489-506.

8. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности / М.: Наука, 1976.

8*